مراكز الكتل ومراكز الثقل

1. مركز كتل مجموعة نقاط مادية:
لتكن لدينا مجموعة من النقاط المادية $A_1, A_2, \dots, A_n$ المتوضعة في الفراغ والتي كتلها على الترتيب $m_1, m_2, \dots, m_n$ نقول تعريفاً عن النقطة C أنها مركز كتل هذه المجموعة إذا حققت النقطة C العلاقة التالية:

$$m_1\overrightarrow{CA_1} + m_2\overrightarrow{CA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{CA_n} = \vec{0} \dots (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{CA_i} = \vec{0}$$

وإذا أخذنا نقطة ثابتة في الفراغ O كمبدأ للأشعة يكون لدينا مجموعة من الأشعة على الشكل:

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA_i} = \overrightarrow{OA_i} \Rightarrow \overrightarrow{CA_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OC}$$

نعوض في (1) نجد:

$$m_1\left(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OC}\right) + m_2\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OC}\right) + \cdots + m_n\left(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OC}\right) = \vec{0}$$

بفك الأقواس وعزل $\overrightarrow{OC}$ نجد:

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)\overrightarrow{OC} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OA_n}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OA_i}}{M}; M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

نسمي هذا الدستور بدستور مركز الكتل، ونسمي C مركز كتل المجموعة المادية ويكون هذا المركز وحيد التعيين أي لا يوجد إلا مركز كتل واحد للمجموعة المادية.

2. تعيين مركز الكتل تحليلياً:
لنفرض أنه لدينا مجموعة من النقاط المادية احداثياتها $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$
ولنرمز لإحداثيات مركز كتلها (x_c, y_c, z_c) عندئذ:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}, y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M}, z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M}$$

3. مركز كتل جسم مادي:
إذا كان الجسم المادي S عبارة عن مجموعة من النقاط المادية المتلاصقة بحيث تشغل الحيز الهندسي V ، عندئذ تؤول عمليات الجمع إلى تكاملات محددة على الحيز الذي يشغله الجسم، فيكون:

$$x_c = \frac{\int x dm}{M}, y_c = \frac{\int y dm}{M}, z_c = \frac{\int z dm}{M}$$

اذا كان الجسم سلكاً أو قضيباً رفيعاً، عندها يؤول التكامل إلى تكامل خطي، وتكون الكتلة هي عبارة عن جداء كثافة المادة في الحيز الذي تشغله، فيكون:

$$m = \rho l \Rightarrow dm = \rho dl$$

$$x_c = \frac{\int x\rho dl}{\int \rho dl}, y_c = \frac{\int y\rho dl}{\int \rho dl}, z_c = \frac{\int z\rho dl}{\int \rho dl}$$

$$\Rightarrow x_c = \frac{\int x dl}{l}, y_c = \frac{\int y dl}{l}, z_c = \frac{\int z dl}{l}$$

أما إذا كان الجسم سطحاً، مثل سطح صفيحة أو سطح مثلث أو سطح كرة، عندئذ يؤول التكامل إلى تكامل سطحي:

$$m = \rho S \Rightarrow dm = \rho dS$$

$$x_c = \frac{\iint x\, ds}{s}, y_c = \frac{\iint y\, ds}{s}, z_c = \frac{\iint z\, ds}{s}$$

وإذا كان الجسم يشغل حجماً في الفراغ، مثل كرة مصمتة أو جسم مخروط مصمت أو اسطوانة دورانية مصمتة، في هذه الحالة يؤول التكامل إلى تكامل حجمي ويكون

$$m = \rho V \Rightarrow dm = \rho dv$$

$$\Rightarrow x_c = \frac{\iiint x dv}{V}, y_c = \frac{\iiint y dv}{V}, z_c = \frac{\iiint z dv}{V}$$

ملاحظات:

1. إذا كان للجسم المتجانس مستوي تناظر فإن مركز الكتل يقع في هذا المستوي.
2. إذا كان للجسم المتجانس محور تناظر فإن مركز الكتل يقع على هذا المحور.
3. إذا كان للجسم المتجانس مركز تناظر فيكون هذا المركز هو مركز الكتل.

4. مركز كتل عدة أجسام:

إذا كان الجسم S' مؤلفاً من عدة أجسام مثل $S_1, S_2, \ldots, S_k$ والتي كتلتها على الترتيب هي $M_1, M_2, \ldots, M_k$ ومراكز كتلتها على الترتيب $C_1, C_2, \ldots, C_k$ فإن مركز كتل هذا الجسم هو النقطة المعينة بالشكل:

$$\overrightarrow{oc} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i \overrightarrow{oc_i}}{\sum_{i=1}^{k} m_i}$$

5. مركز كتل جسم مفرغ منه جسم آخر:

إذا كان لدينا S جسم مؤلف من الجسم S_1 اقتطع منه جسم آخر S_2 يقع بكامله ضمن الحيز الهندسي للجسم S_1، فمركز كتل هذا الجسم يعطى بالشكل:

$$\overrightarrow{oc} = \frac{M_1\overrightarrow{oc_1} - M_2\overrightarrow{oc_2}}{M_1 - M_2};\ M_1 = \sum_{S_1} m_i, M_2 = \sum_{S_2} m_i$$

اي انه نوجد أولاً مركزي كتل الجسمين S_2, S_1 ثم نطبق العلاقة.

6. مركز ثقل مجموعة مادية أو أجسام مادية:

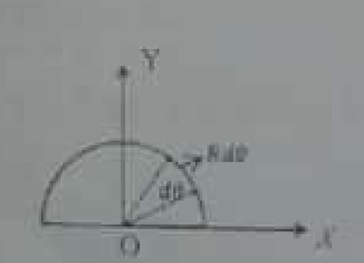
إن مركز الثقل لمجموعة مادية ينطبق على مركز الكتل إذا كانت المسافة بين نقاط المجموعة المادية صغيرة بالنسبة لنصف قطر الأرض. ان ثقل أي نقطة مادية هو: mg

$$gm_1\overrightarrow{CA_1} + gm_2\overrightarrow{CA_2} + \cdots + gm_n\overrightarrow{CA_n} = \vec{0}$$

مثال1:

أوجد مركز كتل سلك متجانس بشكل قوس نصف دائري نصف قطر دائرته R.

الحل:



نستخدم الإحداثيات القطبية، معادلة الدائرة

$$x = R\cos\theta, y = R\sin\theta, dl = Rd\theta, l = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$$

$$\Rightarrow x_c = \frac{\int x dl}{l} = \frac{\int_0^{\pi} R\cos\theta R d\theta}{\pi R} = \frac{R}{\pi}[\sin\theta]_0^{\pi} = 0$$

$$\Rightarrow y_c = \frac{\int x dl}{l} = \frac{\int_0^{\pi} R\sin\theta R d\theta}{\pi R} = \frac{R}{\pi}[-\cos\theta]_0^{\pi} = \frac{2R}{\pi}$$

$c(0, \frac{2R}{\pi})$ إذا فإن مركز الكتل يقع على محور التناظر oy

مثال2:

أوجد مركز كتل صفيحة متجانسة بشكل نصف دائرة نصف قطرها R.

الحل:

أيضاً نستخدم الإحداثيات القطبية

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, ds = r dr d\theta, 0 \le r \le R, 0 \le \theta \le \pi, s = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$x_c = \frac{\iint x ds}{s} = \frac{\int_0^R \int_0^{\pi} r\cos\theta r dr d\theta}{\frac{\pi R^2}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \cos\theta d\theta = \frac{2R^3}{\pi R^2}[\sin\theta]_0^{\pi} = 0$$

$$y_c = \frac{\iint y ds}{s} = \frac{\int_0^R \int_0^{\pi} r\sin\theta r dr d\theta}{\frac{\pi R^2}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{2R^3}{3\pi R^2}[-\cos\theta]_0^{\pi} = \frac{4R}{3\pi}$$

إذا مركز الكتل $c(0, \frac{4R}{3\pi})$

مثال3:

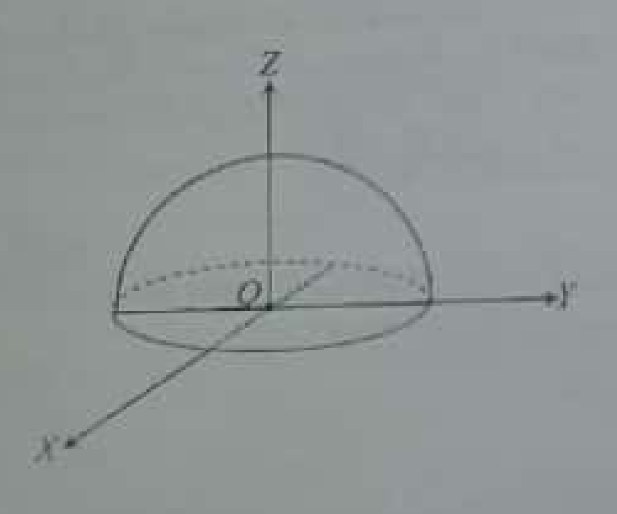
أوجد مركز الكتل نصف كرة مصمتة نصف قطرها R.

الحل:

نستخدم الإحداثيات الكروية

$$x = r\cos\varphi\sin\theta$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = r\cos\theta$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le R$$

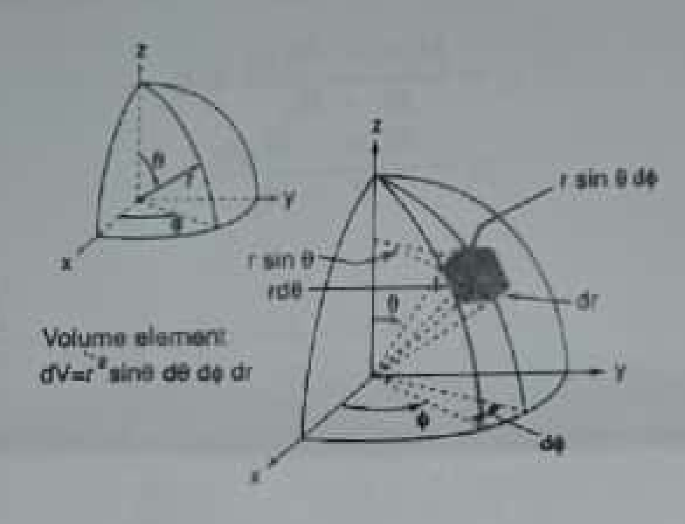


$$dv = (dr)(r\sin\theta d\varphi)(rd\theta),\ v = \frac{2\pi R^3}{3}$$

$$dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$x_c = \frac{\iiint x dv}{V} = \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi \sin\theta r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi}{\frac{2\pi R^3}{3}}$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R r^3\, dr \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta = 0$$



$$y_c = \frac{\iiint y dv}{V} = \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\varphi \sin\theta r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi}{\frac{2\pi R^3}{3}}$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R r^3\, dr \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \frac{R^4}{4} [-\cos\varphi]_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right] d\theta = 0$$

$$z = \frac{\iiint z dv}{V} = \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi}{\frac{2\pi R^3}{3}}$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R r^3\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3}\frac{R^4}{4}(2\pi)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{sin2\theta}{2}\right]d\varphi = \frac{3R}{8}$$

إذاً مركز الكتل $c(0,0,\frac{3R}{8})$

مثال4:

أوجد مركز الكتل للسطح المتجانس المحصور بين صفيحة نصف دائرية والمستطيل الناتج عن تقاطع قطر الد

والمماس للدائرة الموازي له والمماسين المتعامدين.

الحل:

المحور oy هو محور تناظري للجملة. إذاً مركز الكتل يقع على المحور oy.

مركز الكتل يعطى بالشكل:

$$x_c = \frac{M_1x_1 - M_2x_2}{M_1 - M_2} = 0$$

$$y_c = \frac{M_1y_1 - M_2y_2}{M_1 - M_2}$$

y_1: كتلة المستطيل، y_2: كتلة الدائرة

$y_1 = \frac{R}{2}$: مركز كتل المستطيل، $y_2 = \frac{4R}{3\pi}$: مركز كتل الصفيحة نصف الدائرة

$$y_c = \frac{2\rho R^2\frac{R}{2} - \frac{\rho\pi R^2}{2}\frac{4R}{3\pi}}{2\rho R^2 - \frac{\rho\pi R^2}{2}} = \frac{2R}{3(4-\pi)}$$

مثال 5:

أوجد مركز كتل مخروط دوراني مصمت قائم ومتجانس نصف قطر قاعدته R وارتفاعه h.

الحل:

نستخدم الاحداثيات الاسطوانية:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z, dv = rdrd\theta dz, v = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

من تشابه المثلثين ABC, AOD نجد $\frac{AB}{AO} = \frac{BC}{OD}$

$$\frac{h-z}{h} = \frac{r}{R} \Longrightarrow r = \frac{R}{h}(h-z) = R - \frac{Rz}{h}$$

$$0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le z \le h, 0 \le r \le R - \frac{Rz}{h}$$

$$x_c = \frac{\iiint xdv}{V} = \frac{\iiint r\cos\theta rdrd\theta dz}{\frac{\pi R^2 h}{3}}$$

$$= \frac{3}{\pi R^2 h}\int_0^h \left(\int_0^{R-\frac{Rz}{h}} r^2 dr\right) dz \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta$$

$$y_c = \frac{\iiint y dv}{V} = \frac{\iiint r\sin\theta r dr d\theta dz}{\frac{\pi R^2 h}{3}} = \frac{3}{\pi R^2 h}\int_0^h \left(\int_0^{R-\frac{Rz}{h}} r^2 dr\right) dz \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$$

$$z_c = \frac{\iiint z dv}{V} = \frac{\iiint z r dr d\theta dz}{\frac{\pi R^2 h}{3}} = \frac{3}{\pi R^2 h}\int_0^h \left(\int_0^{R-\frac{Rz}{h}} r dr\right) z\, dz \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{6\pi}{\pi R^2 h}\int_0^h \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{R-\frac{Rz}{h}} z dz = \frac{6\pi}{2\pi R^2 h}\int_0^h \left(R - \frac{Rz}{h}\right)^2 z dz = \frac{3}{h}\int_0^h \left(z - \frac{2z^2}{h} + \frac{z^3}{h^2}\right) dz = \frac{h}{4}$$

إذاً مركز الكتل $c(0,0,\frac{h}{4})$

Scanned by CamScanner

عزوم العطالة

+ عزم العطالة أو عزم التصور الذاتي هو مقياس مقاومة الجسم للتغيرات في معدل دورانه ويقاس.
مثلاً: يمكن وصف صعوبة أو سهولة تغيير سرعة الدوران لجسم ما من خلال عزم العطالة. لو فرضنا أنه لدينا قرصين متساويين في الكتلة ولهما قطرين مختلفين، نلاحظ أن القرص ذو القطر الأكبر يحتاج إلى بذل جهد أكبر لتدويره بسرعة دورانية مساوية للقرص الأصغر، وحيث يبقى القرص ذو القطر الأكبر محافظاً على دورانه لفترة أطول.

1. تعريف عزم عطالة نقطة:

عزم نقطة ما مثل A بالنسبة لنقطة مثل O هو بالتعريف جداء كتلة النقطة بمربع بعدها عن O ويرمز له بالرمز I_O. فإذا كانت m هي كتلة النقطة A وكان r هو بعد النقطة عن O فيكون: $I_O = mr^2$

وإذا كان هناك محور مثل Δ، فإن عزم عطالة النقطة A بالنسبة للمحور Δ هو جداء كتلة النقطة بمربع بعدها عن هذا المحور، ونرمز له بالرمز $I_\Delta = mr^2$.

وإذا كان هناك مستوي مثل P، فإن عزم عطالة النقطة A بالنسبة للمستوي P هو جداء كتلة النقطة بمربع بعدها عن هذا المستوي، ونرمز له بالرمز $I_P = mr^2$.

2. تعريف عزم عطالة مجموعة من النقاط المادية:

إذا كان لدينا مجموعة من النقاط المادية $A_1, A_2, \dots, A_n$ فإن عزم عطالتها بالنسبة لنقطة أو محور أو مستوي هو مجموع عزوم عطالات هذه النقاط بالنسبة للنقطة أو المحور أو المستوي ويكون:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

3. عزم عطالة الأجسام المادية:

إذا كان لدينا جسم مادي S يشغل الحيز الهندسي V في الفراغ فيمكن اعتبار الجسم مجموعة من النقاط المادية المتلاصقة أو المتجاورة. ويؤول المجموع إلى تكامل، وبالتالي يمكننا كتابة عزم العطالة بالشكل:

$$I = \int r^2 dm$$

r هو بعد النقطة ذات الكتلة dm عن النقطة أو المحور أو المستوي. وبما أن $dm = \rho dv$ فيكون:

$$I = \rho \int r^2 dv$$

ملاحظة: إذا كان الجسم المادي مؤلف من أجسام مثل $S_1, S_2, \dots, S_n$ عندئذ عزم عطالته بالنسبة لنقطة أو محور أو مستوي يساوي مجموع عزوم العطالة لكل جسم من هذه الأجسام أي:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \int_{V_i} r^2 dv = \rho_1 \int_{v_1} r^2 dv + \rho_2 \int_{v_2} r^2 dv + \cdots + \rho_n \int_{v_n} r^2 dv$$

ملاحظة: إذا كان الجسم ناتج عن أخذ جسم مثل S_1 واقتطاع جسم منه مثل S_2 فيكون:

$$I = \rho_1 \int_{v_1} r^2 dv - \rho_2 \int_{v_2} r^2 dv = I_1 - I_2$$

ملاحظة: إن عزم عطالة جملة مادية هو جداء الكتلة بمربع البعد، لذلك فإن عزم العطالة هو مقدار موجب أو صفر.

. نصف قطر العطالة:

نسمي العدد الموجب k الذي يحقق العلاقة $I = mk^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{I}{m}}$ بنصف قطر العطالة للمجموعة المادية بالنسبة لنقطة أو محور أو مستوي. حيث I عزم عطالة المجموعة المادية و m كتلتها.

5. عزم العطالة بالنسبة للمحاور والمستويات الإحداثية:

لنفرض لدينا مجموعة من النقاط المادية $A_1, A_2, \dots, A_n$ والمنسوبة للمحاور الإحداثية القائمة $OXYZ$ والتي احداثياتها على الترتيب $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ وكتلها $m_1, m_2, \dots, m_n$ عدد يكون:

1) عزم عطالة المجموعة بالنسبة لمركز الاحداثيات O:

$$I_o = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \ or \ I_o = \rho \iiint_v (x^2 + y^2 + z^2) dv$$ تكاملات في حالة الجسم الصلب

2) عزم العطالة بالنسبة للمحاور الإحداثية:

$$ox: I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2) \ or \ I_x = \rho \iiint_v (y^2 + z^2) dv$$

$$oy: I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + z_i^2) \ or \ I_y = \rho \iiint_v (x^2 + z^2) dv$$

$$oz: I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + x_i^2) \ or \ I_z = \rho \iiint_v (y^2 + x^2) dv$$

3) عزم العطالة بالنسبة للمستويات الإحداثية:

$$oxy: I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2 \ or \ I_x = \rho \iiint_v z^2 dv$$

$$oyz: I_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 \ or \ I_x = \rho \iiint_v x^2 dv$$

$$oxz: I_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 \ or \ I_x = \rho \iiint_v y^2 dv$$

6. العلاقات بين عزوم العطالة في الحالات العامة:

بالاستناد إلى خواص التكاملات نستنتج بسهولة أن:

1) $I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$

أي أن عزم عطالة مجموعة مادية بالنسبة لنقطة يساوي نصف مجموع عزوم عطالتها بالنسبة لثلاثة محاور متعامدة تمر بالنقطة

2) $I_o = (I_{xy} + I_{yz} + I_{xz})$

أي أن عزم عطالة مجموعة مادية بالنسبة لنقطة يساوي مجموع عزوم عطالتها بالنسبة لثلاثة مستويات متعامدة تمر بالنقطة.

3) $I_x = I_{xy} + I_{xz}, I_y = I_{xy} + I_{yz}, I_z = I_{xz} + I_{yz}$

أي أن عزم عطالة مجموعة مادية بالنسبة لمستقيم يساوي مجموع عزمي عطالتها بالنسبة لمستويين متعامدين فصلهما المشترك هذا المستقيم.

4) $I_o = I_{xy} + I_z = I_{zy} + I_x = I_{xz} + I_y$

أي أن عزم عطالة مجموعة مادية بالنسبة لنقطة يساوي مجموع عزوم عطالتها بالنسبة لمحور ومستو متعامدين في هذه النقطة.

7. **العلاقات بين عزوم عطالة الأجسام المستوية:**

إذا كانت جميع نقاط الجسم تقع في المستوي oxy عندئذ نقول عن المجموعة أنها مستوية ويكون $Z = 0$ وتصبح العلاقات السابقة بالشكل:

$$I_o = \rho \int_S (x^2 + y^2)\, ds$$

$$I_x = \rho \int_S y^2 ds\, , I_y = \rho \int_S x^2 ds, I_z = \rho \int_S (x^2 + y^2)\, ds$$

$$I_{xy} = 0, I_{yz} = \rho \int_S x^2 ds\ , I_{xz} = \rho \int_S y^2 ds$$

نستنتج من العلاقات السابقة أن:

1) $I_o = I_z = I_x + I_y = I_{yz} + I_{xz}$

2) $I_x = I_{xz}, I_y = I_{yz}$

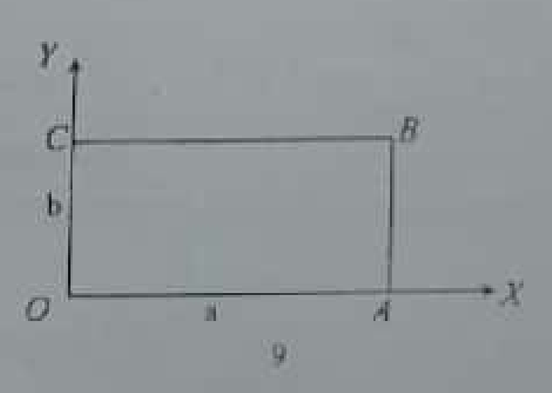
3) $I_{xy} = 0$ أي أن عزم عطالة جسم مستو بالنسبة لمستويه يكون معدوماً.

مثال 6:

لتكن لدينا صفيحة مستطيلة متجانسة $OABC$ طولها a وعرضها b وكتلتها M. بفرض $OXYZ$ جملة محاور قائمة ومتعامدة بحيث أن الضلع OA محمول على المحور OX والضلع OC محمول على المحور OY والمحور OZ عمودي على مستوي الصفيحة. المطلوب:

1. أوجد عزم عطالة الصفيحة بالنسبة لمركز الجملة O.
2. أوجد عزم عطالة الصفيحة بالنسبة للمحاور الإحداثية.
3. أوجد عزم عطالة الصفيحة بالنسبة للمستويات الإحداثية.

الحل:



$$I_o = \rho \int (x^2 + y^2)\, ds$$

$$I_o = \rho [\int_0^a \int_0^b x^2 dxdy + \int_0^a \int_0^b y^2 dxdy]$$

$$I_o = \rho [\int_0^a x^2 dx \int_0^b dy + \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy] = \rho \frac{ab}{3}(a^2 + b^2) = \frac{M}{3}(a^2 + b^2)$$

$$I_x = \rho \int y^2 ds = \rho \int_0^a \int_0^b y^2 dxdy = \rho \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy = \rho a \frac{b^3}{3} = \frac{Mb^2}{3}$$

$$I_y = \rho \int x^2 ds = \rho \int_0^a \int_0^b x^2 dxdy = \rho \int_0^a x^2 dx \int_0^b dy = \rho b \frac{a^3}{3} = \frac{Ma^2}{3}$$

$$I_z = I_o = I_x + I_y = \frac{M}{3}(a^2 + b^2)$$

$$I_{xy} = 0, I_{xz} = I_x = \frac{Mb^2}{3}, I_{yz} = I_y = \frac{Ma^2}{3}$$

مثال 7:

احسب عزوم العطالة لصفيحة نصف دائرية متجانسة نصف قطرها R وكتلتها M.

الحل:

نستخدم الاحداثيات القطبية:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, ds = r dr d\theta$$

$$0 \le r \le R, 0 \le \theta \le \pi$$

$$M = \frac{\rho \pi R^2}{2}$$

$$I_x = \rho \int y^2 ds = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \rho \frac{R^4}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{MR^2}{4}$$

$$I_y = \rho \int x^2 ds = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi \cos^2\theta d\theta = \rho \frac{R^4}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{MR^2}{4}$$

$$I_o = I_x + I_y = \frac{MR^2}{4} + \frac{MR^2}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

$$I_{xy} = 0, I_{xz} = I_x = \frac{MR^3}{4}, I_{yz} = I_y = \frac{MR^2}{4}$$

مثال 8:

أوجد عزوم عطالة نصف كرة مصمتة نصف قطرها R وكتلتها M.

الحل:

نستخدم الاحداثيات الكروية:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = r\cos\theta$$
$$dv = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi, M = \frac{2\pi\rho R^3}{3}$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le R$$

$$I_o = \rho\iiint_v (x^2 + y^2 + z^2)dv = \rho\iiint_v r^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$
$$= \rho\int_0^R r^4 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{5}\pi\rho R^5 = \frac{3}{5}MR^2$$
$$I_x = \rho\iiint_v (y^2 + z^2)dv = \rho\iiint_v (r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta)r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$$
$$= \rho\int_0^R r^4 dr[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(\sin^2\varphi\sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta)d\theta d\varphi]$$
$$= \rho\int_0^R r^4 dr[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(\sin^2\varphi\sin^3\theta)d\theta d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta\sin\theta)d\theta d\varphi] = \frac{2MR^2}{5}$$
$$I_y = \rho\iiint_v (x^2 + z^2)dv = \rho\iiint_v (r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta)r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{2MR^2}{5}$$

وبما أن نصف الكرة متناظر بالنسبة كل من المحورين ox, oy عندئذ يمكن الاستنتاج مباشرة أن $I_x = I_y$

$$I_z = \rho\iiint_v (x^2 + y^2)dv = \rho\iiint_v (r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$$
$$= \rho\int_0^R r^4 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi\rho R^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos^2\theta)\sin\theta d\theta$$
$$= \frac{2\pi\rho R^5}{5}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi\rho R^5}{5}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2MR^2}{5}$$

كان بالإمكان إيجاد عزوم العطالة بالنسبة للمحاور أولاً ثم إيجاد عزم العطالة بالنسبة للمركز من خلال العلاقة

$$I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) = \frac{1}{2}\left(\frac{2MR^2}{5} + \frac{2MR^2}{5} + \frac{2MR^2}{5}\right) = \frac{3MR^2}{5}$$

أوجد عزوم العطالة بالنسبة للمستويات الإحداثية

8. نظرية هويغنز الأولى:

1) عزم عطالة مجموعة نقاط مادية أو جسم صلب بالنسبة لنقطة يساوي عزم عطالة الجملة بالنسبة لمركز ثقلها مضافاً إليه جداء كتلة المجموعة المادية بمربع البعد بين النقطتين.

2) عزم عطالة مجموعة نقاط مادية أو جسم صلب بالنسبة لمحور Δ يساوي عزم عطالة الجملة بالنسبة لمحور مار من مركز ثقلها مضافاً إليه جداء كتلة المجموعة المادية بمربع البعد بين المحورين.

9) عزم عطالة مجموعة نقاط مادية أو جسم صلب بالنسبة لمستو p يساوي عزم عطالة الجملة بالنسبة لمستوٍ مار من كتلها وموازٍ للمستوي p مضافاً إليه جداء كتلة المجموعة المادية بمربع البعد بين المستويين.

البرهان:
ليكن لدينا مجموعة من النقاط المادية $A_1, A_2, \dots, A_n$ والمنسوبة للمحاور الإحداثية القائمة $OXYZ$ والتي كتلها $m_1, m_2, \dots, m_n$ و M هي كتلة المجموعة بكاملها. من تعريف عزم عطالة المجموعة حول النقطة O نجد: و ليكن C هو مركز كتل المجموعة المادية.

$$I_o = \sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{OA_i})^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{OC} + \overline{CA_i})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{OC})^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{CA_i})^2 + 2\sum_{i=1}^{n} m_i\overline{OC}.\overline{CA_i}$$

$$= (\overline{OC})^2\sum_{i=1}^{n} m_i + \sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{CA_i})^2 + 2\overline{OC}\sum_{i=1}^{n} m_i\overline{CA_i}$$

لكن $\sum_{i=1}^{n} m_i\overline{CA_i} = 0$ و $\sum_{i=1}^{n} m_i = M$ عندئذ يكون:

$$I_o = M(\overline{OC})^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{CA_i})^2$$

إن المقدار $\sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{CA_i})^2$ هو عبارة عن عزم عطالة المجموعة بالنسبة للمركز C أما المقدار $M(\overline{OC})^2$ هو عبارة عن جداء كتلة المجموعة بمربع البعد بين O و C. إذاً:

$$I_o = I_c + Md^2; d = (\overline{OC})^2$$

وبنفس الطريقة نبرهن أن:

$$I_\Delta = I_{C_\Delta} + Md^2$$

حيث C_Δ محور يمر من C ويوازي المحور Δ و d هو البعد بين المحورين.
وبنفس الطريقة نبرهن أن:

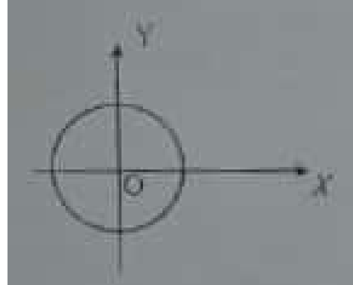
$$I_p = I_{C_p} + Md^2$$

حيث C_p مستوٍ يمر من C ويوازي المستوي p و d هو البعد بين المستويين.

مثال9:
أوجد عزوم عطالة سلك دائري متجانس نصف قطره R وكتلته M:
1) بالنسبة لمركز دائرته 2) بالنسبة لقطر دائرته 3) بالنسبة لنقطة من السلك.

الحل:
السلك الدائري موجود في المستوي oxy أي أن $z = 0$
نستخدم الإحداثيات القطبية:

$$x = R\cos\theta, y = R\sin\theta, dl = Rd\theta, l = 2\pi R, M = 2\rho\pi R$$



عزم العطالة بالنسبة لمركز دائرته:

$$I_o = \rho \int (x^2 + y^2)\, ds = \rho \int_0^{2\pi} R^2 R d\theta = \rho R^3 2\pi = MR^2$$

عزم العطالة بالنسبة لقطر دائرته:

$$I_x = \rho \int (y^2)\, ds = \rho \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2\theta R d\theta = \rho R^3 \int_0^{2\pi} [\frac{1 - \cos 2\theta}{2}] d\theta = \rho R^3 \pi = \frac{MR^2}{2} = I_y$$

عزم العطالة بالنسبة لنقطة من محيط السلك:
لنأخذ نقطة A من محيط الدائرة عندئذ يكون حسب نظرية هويغنز الأولى:

$$I_A = I_o + Md^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$

مثال 10:

أوجد عزم عطالة قضيب OA متجانس طوله a وكتلته M وذلك:
1) بالنسبة لأحد الطرفين.
2) بالنسبة لمحور منطبق عليه، ثم بالنسبة لمستوي منطبق عليه
3) بالنسبة لمحور عمودي عليه في أحد طرفيه، ثم بالنسبة لمستوي عمودي عليه في أحد طرفيه.

الحل:
ليكن OA هو القضيب الذي طوله a نختاره منطبق على المحور oz عندئذ يكون:

(1

$$I_o = \rho \int (x^2 + y^2 + z^2)\, dl = \rho \int_0^a z^2\, dz = \rho \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^a = \rho \frac{a^3}{3} = \frac{Ma^2}{3}$$

(2

$$I_z = \rho \int (x^2 + y^2)\, dl = 0$$

$$I_{xz} = \rho \int (y^2)\, dl = 0, I_{yz} = \rho \int (x^2)\, dl = 0$$

(3

$$I_x = \rho \int (z^2 + y^2)\, dl = \rho \int_0^a z^2\, dz = \rho \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^a = \rho \frac{a^3}{3} = \frac{Ma^2}{3}$$

$$I_y = \rho \int (z^2 + x^2)\, dl = \rho \int_0^a z^2\, dz = \rho \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^a = \rho \frac{a^3}{3} = \frac{Ma^2}{3}$$

$$I_{xy} = \rho \int (z^2)\, dl = \frac{Ma^2}{3}$$

4) استنتج من حساب عزم عطالة القضيب بالنسبة لمنتصفه

$$I_o = I_c + Md^2 \quad d = \frac{a}{2}$$

$$I_c = I_o - Md^2 = \frac{Ma^2}{3} - \frac{Ma^2}{4} = \frac{Ma^2}{12}$$